Die Funktion $f(x) = a \cdot b^{c(x-d)} + y_0$
Übung

1. Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen.

   a) $f_1(x) = \frac{1}{2} \cdot 2^x$

   b) $f_2(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

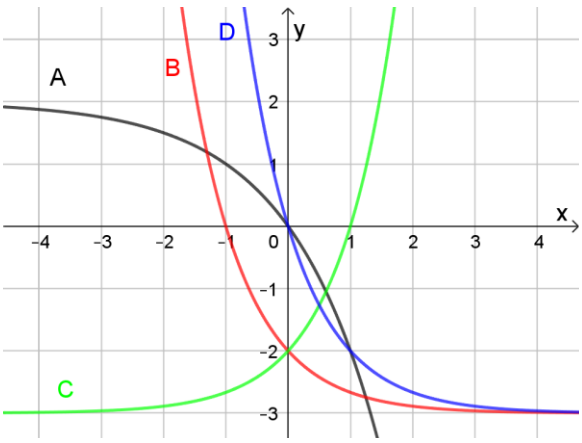
   c) $f_3(x) = -\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} + 3$

   d) $f_4(x) = -\frac{1}{4} \cdot 2^{2x+3} + 4$

2. Ordnen Sie den Funktionstermen ① bis ④ die Graphen A bis D zu.

   ① $f(x) = 3^x - 3$ ② $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$

   ③ $f(x) = -2 \cdot 4^{\frac{1}{2}x} + 2$ ④ $f(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x - 3$



3. Betrachtet werden die Funktionen $f(x) = 2^{-x}$ und $g(x) = a \cdot 2^{-(x-d)} + y_0$. Geben Sie jeweils $a, d, y_0 \in \mathbb{R}$ an, so dass der Graph G_g von g aus dem Graphen G_f von f entsteht.

   a) Der Graph von f wird an der x-Achse gespiegelt.

   b) Der Graph wird um 3 nach unten verschoben.

   c) G_f wird um 4 nach links verschoben.

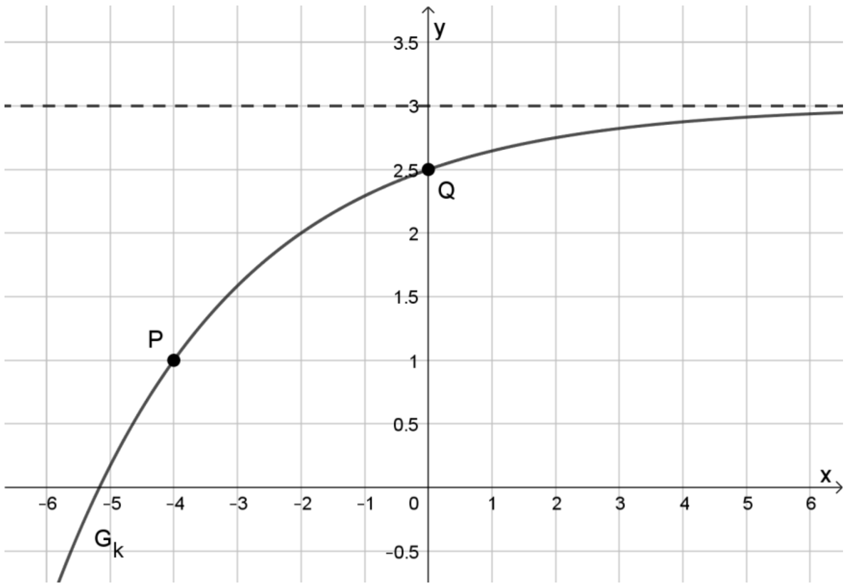
   d) Der Graph wird um das Dreifache in y-Richtung getreckt und um 2 nach oben sowie um 1 nach rechts verschoben.

4. Begründen Sie rechnerisch: Die Funktionen mit den Termen

$$f(x) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x, g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \text{ und } h(x) = 2^{1-x}$$

sind identisch.

5. Die untere Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Graphen G_k der reellen Funktion $k: x \mapsto a \cdot 2^{-\frac{x}{n}} + y_0$ mit der Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}$ und der Asymptote von G_k (gestichelt), wobei $a, n, y_0 \in \mathbb{R}$ und $n \neq 0$.
Ermitteln Sie mit Hilfe der Abbildung die Werte für a, n und y_0, wobei die Koordinaten der Punkt P und Q aus dem Graphen entnommen werden können.



6. Wahr oder falsch bezüglich der Funktion $f(x) = a \cdot b^{c(x-d)} + y_0$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

a) Der Graph von f besitzt stets eine waagrechte Asymptote bei $y = y_0$.

b) Der Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse liegt bei $S_y(0; a)$.

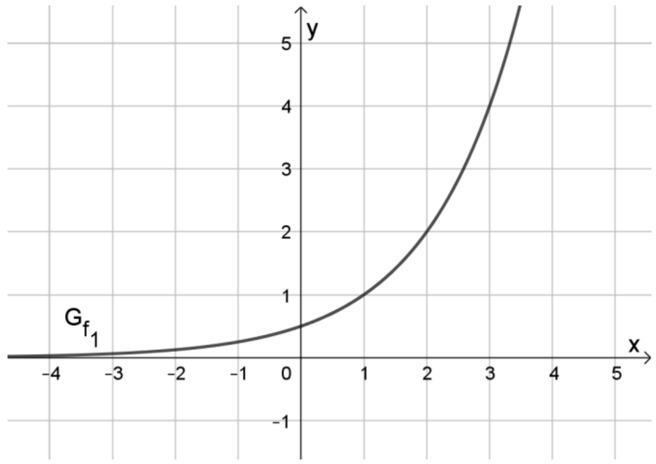
c) Die Funktion kann niemals negative Werte annehmen, wenn $a > 0$ und $y_0 \geq 0$

d) Wenn $d > 0$, dann verschiebt der Parameter d den Graphen nach rechts,.

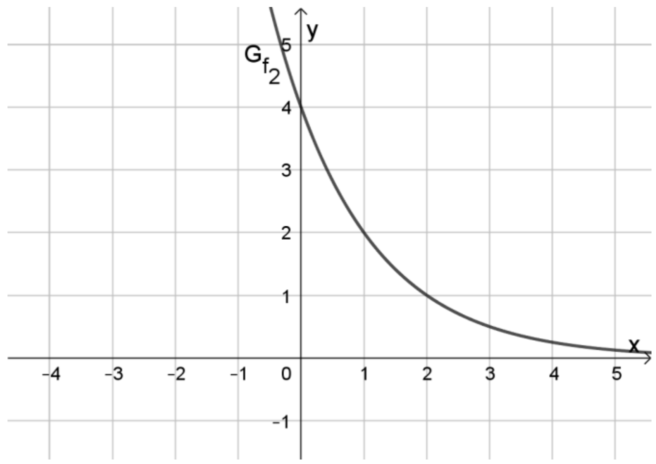
e) Für positive Werte von $b \in \mathbb{R}$ handelt es sich um ein exponentielles Wachstum.

Die Funktion $\mathbf{f(x) = a \cdot b^{c(x-d)} + y_0}$
Lösung

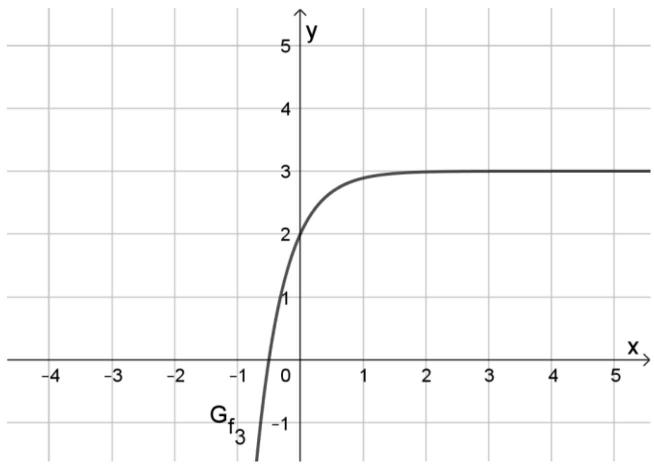
1.
a)



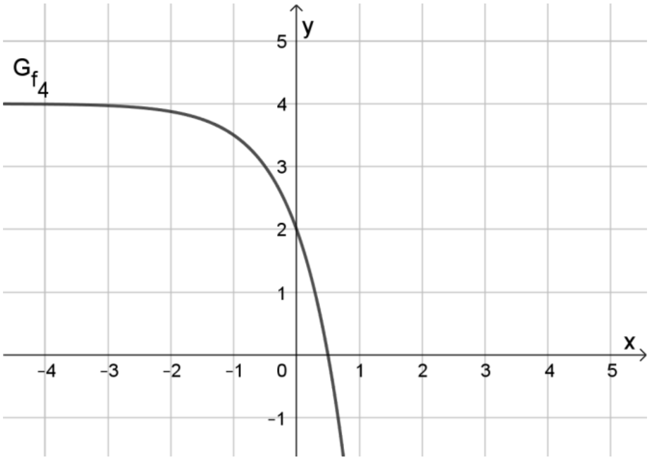
b)



c)



d)



2. ① - C
   ② - B
   ③ - A
   ④ - D

3.
   a) $a = -1, d = 0, y_0 = 0$

   b) $a = 1, d = 0, y_0 = -3$

   c) $a = 1, d = -4, y_0 = 0$

   d) $a = 3, d = 1, y_0 = 2$

4. Die Funktionsterme können mit Hilfe der Potenzgesetze umgeformt werden:

$$2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+x} \text{ und } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1+x} = 2^{-(-1+x)} = 2^{1-x}$$

5. Die Asymptote mit der Gleichung $y = 3$ zeigt, dass um 3 nach oben verschoben wurde, damit ist $y_0 = 3$.
   Einsetzen von Q und $y_0 = 3$ bringt die Gleichung $a \cdot 2^0 + 3 = 2{,}5$, wegen $2^0 = 1$ ist $a = -\frac{1}{2}$.
   P eingesetzt zeigt, dass $= -\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{4}{n}} + 3 = 1$ gelten muss, deswegen gilt

$$-\frac{1}{2} \cdot 2^{\frac{4}{n}} = -2$$
$$2^{\frac{4}{n}} = 4$$
$$\frac{4}{n} = 2.$$

   Damit ist $n = 2$.

6.

a) Wahr, y_0 bewirkt eine Verschiebung des Graphen in y-Richtung.

b) Falsch, der Graph wurde gegebenenfalls noch um y_0 verschoben.

c) Wahr, $b^{c(x-d)}$ ist stets positiv, weil b nur positiv sein kann.

d) Wahr, für x müssen entsprechend größere Werte eingesetzt werden, um denselben Funktionswert zu erhalten.

e) Falsch, der Graph könnte auch durch entweder $a < 0$ oder $c < 0$ gespiegelt werden, so dass eine Abnahme entsteht. Abgesehen davon wäre nur für $b > 1$ ein exponentielles Wachstum vorhanden, weil b nicht negativ sein darf.